NOCIONES DE TEORIA DE JUEGOS

Francisco Salto Alemany

1. MOTIVACIÓN, CONCEPTOS BÁSICOS

Partimos de la subasta de 1€ en clase, que ilustra cómo situaciones reales muy diferentes entre sí (subasta del euro, guerras posturales entre pájaros, espera por alguien que no llega, …) sin embargo tienen la misma estructura de intereses, pueden entenderse todas ellas como juegos con una misma estrategia de solución.

Un *agente* es cualquier entidad capaz de realizar acciones de cualquier tipo. Son agentes tanto individuos naturales (personas, organismos vivos) como artificiales (robots, programas), además de tanto colectivos (poblaciones, especies) como abstractos (empresas, naciones).

Informalmente, un *juego* es cualquier interacción estratégica y sometida a constricciones que se realiza entre agentes que optan entre una colección de jugadas posibles. Sobrevivir, llegar a la facultad, sustentar un negocio, mantener una amistad, aprobar un examen, negociar una paz, capturar una presa … son ejemplos de juegos jugados por organismos, personas, especies, poblaciones, empresas, instituciones, etc.

Más precisamente, un juego es cualquier tupla <A,N,8>, donde N es un conjunto no vacío de jugadores, y para cada iYN hay un conjunto A_i de acciones disponibles para i. El juego es finito si A_i es finito para cada jugador i. Cada jugada aYA tiene un valor o utilidad que depende de las jugadas de los demás jugadores. Cuando quiera que el jugador i opte por la jugada a entre el conjunto de jugadas disponibles A_i, escribiremos a_i (a_{-i}. si no lo hace).

La relación de buen orden (transitiva y completa) 8 dispone ordinalmente las preferencias de los agentes. Para representar las preferencias ordinales de los jugadores suelen emplearse funciones de utilidad, que es cualquier procedimiento para asignar números reales a las preferencias.

Asumiremos que los agentes son mínimamente racionales, en el sentido de maximizar su utilidad o preferencia. Tanto amebas como personas, poblaciones como empresas, microorganismos o instituciones son agentes mínimamente racionales.

Llamamos finalmente *estrategia* a cualquier secuencia o conjunto ordenado de acciones.

2. ESTRATEGIAS DE MEJOR RESPUESTA: EQUILIBRIOS DE NASH

Una jugada es mejor respuesta a otra si otorga mayor utilidad. Por ejemplo, en el juego:

	C1	C2
L1	$^{+}10,4$	$^{+}1,5^{+}$
L2	$9,9^{+}$	0,3

Ejemplo 1

Hemos señalado con superíndices “+” las jugadas mejor respuesta para L (izquierda) y para C (derecha). A L le conviene jugar L1 tanto si C juega C1 como si C juega C2, puesto que en ambos casos su utilidad resultante es mayor de la que resulta de jugar L2. Por eso hemos escrito un superíndice “+” a la izquierda en su opción L1, puesto que L1 es mejor respuesta para L tanto cuando C juega C1 como cuando juega C2.

Pongámonos ahora en el caso de C. Le conviene jugar C1 si L juega L2. Le conviene jugar C2 si L juega L1. Ambos hechos están señalados con superíndices “+” a la derecha.

Se observa que simultáneamente L1 es mejor respuesta para C2 y conversamente C2 mejor respuesta para L1. Son mejores respuestas la una de la otra y la otra de la una. Llamaremos equilibrios de Nash básicos a las jugadas que cumplan con esta condición. Para identificar los equilibrios de Nash básicos en una matriz basta con analizar las utilidades de acuerdo con el modelo antes expuesto, esto es, buscando las mejores respuestas para cada jugador y jugada.

Obsérvese también que la estrategia del equilibrio de Nash asegura para cada jugador una ganancia racional mínima dado el juego. Sin embargo, no es necesariamente una solución óptima del juego. Jugando L2,C2 ambos jugadores tendrían más utilidad.

Más ejemplos de equilibrios de Nash básicos.

- Juego de la batalla de los sexos (coordinación sin intereses comunes)

	Deporte	película
deporte	$^{+}2,1^{+}$	0,0
película	0,0	$^{+}1,2^{+}$

- Juego de coordinación

	ir a Mozart	ir a Mahler
ir a Mozart	$^{+}2,2^{+}$	0,0
ir a Mahler	0,0	$^{+}1,1^{+}$

- Dilema del prisionero

	Colabora	Acusa
Colabora	3,3	0,4
Acusa	4,0	$^{+}1,1^{+}$

- Cara o cruz

	cara	Cruz
Cara	1,-1	-1,1
cruz	-1,1	1,-1

Definimos formalmente el concepto de equilibrio de Nash, una vez expuesto informalmente. Dado cualquier juego <A,N,8>, un equilibrio de Nash es un estado o jugada a^*YA tal que para todo iYN:

$(a^*_{-i}, a^*_i)\ 8\ (a^*_{-i},a_i)$ para todo a_iYA_i

Esto es, ningún jugador prefiere ninguna jugada sobre a^*_i

A menudo es útil considerar la siguiente alternativa equivalente. Tomemos cualquier $a_{-i}YA$. Sea $B_i\ (a_{-i})$ el conjunto de las mejores acciones para i dado $a_{-i:}$

$B_i\ (a_{-i})= \{a_iYA: (a_{-i}, a_i)\ 8\ (a_{--i},a'_i)\ \}$ para toda jugada a'_iYA_i

La función que toma sus valores de B es la función de mejor respuesta de i. Un equilibrio de Nash es entonces un estado a* tal que:

$a^*_i\ YB_i\ (a^*_{-i})$ para todo iYN

Ejercicios:

Encontrar todos los equilibrios de Nash básicos en los juegos siguientes:

1.1.

	C1	C2	C3
L1	5,0	-1,-5	10,-1
L2	-1,-1	0,5	-1,-2
L3	-1,1	-2,-1	6,6

1.2.

	C1	C2	C3
L1	3,3	-100,-100	9,0
L2	-100,-100	3,3	0,0
L3	0,9	0,0	8,8

Por lo tanto los juegos son interacciones cuyo resultado está determinado por la combinación de las acciones de cada jugador. Evaluando estas acciones se pueden determinar estrategias o planes de acción. La estrategia más simple es una norma que indica al jugador qué hacer: ataca, defiende, retrocede, come, dispara, ayuda … Las estrategias *puras* son colecciones de normas o instrucciones explícitas de este tipo. Sin embargo, hay muchas ocasiones en las que las estrategias óptimas no son puras, sino

probabilísticas. A menudo los agentes carecen de información o recursos para disponer de una estrategia pura, y deben entonces aleatorizar o considerar las probabilidades de cada opción, teniendo en cuenta que su suma es 1.
Cuando un jugador elige entre las acciones A_1, A_2, …. A_n, con probabilidades respectivas de p_1, p_2,…p_N de modo tal que $p_1+p_2+…+p_n=1$ y $07p_i71$, hablamos de una estrategia *mixta*

Adviértase cómo las estrategias puras son un caso particular de las estrategias mixtas.
Ejemplo. Julia elige entre (A) seguir recto, (B) girar a la derecha, (C) girar a la izquierda. Si tuviese información fideligna sobre lo que hace el camión enfrente, tendría una estrategia pura A, B ó C. Pero no es el caso. Julia tiene que actuar asignando probabilidades p_A, p_B, p_C, de modo tal que $p_A+p_B+p_C=1$.

Es habitual que en los juegos no sólo haya incertidumbre acerca de las jugadas de los otros, sino que haya un interés estratégico por no hacerse predecible ante los oponentes. Una manera óptima de evitarse predecible es evitárselo incluso para sí mismo, actuando aleatoriamente. (La familia de casos de la subasta del euro es un ejemplo concreto).

3. TIEMPO LÓGICO Y TIEMPO HISTÓRICO

La forma normal de un juego es su matriz o forma estratégica, que indica en cada casilla la utilidad resultante para cada jugador. Los ejemplos anteriores de juegos han empleado esta forma normal. En ella no se informa del proceso del juego, como si todos los jugadores actuasen simultáneamente. La forma normal exhibe el juego en el tiempo lógico, determinado exclusivamente por los valores de utilidad de las distintas estrategias.

Además de la forma normal, puede emplearse la forma extensiva o dinámica, que expresa el desarrollo de un juego en el tiempo como un diagrama arbóleo. Las siguientes son dos representaciones dinámicas del juego Ejemplo 1 mostrado arriba:

0

L1 L2

0---------0

C1 C2 C1 C2

10 1 9 0 L

4 5 9 3 C

0

C1 C2

0--------0

C1 C2 C1 C2

L 10 9 1 0

C 4 9 5 3

La línea quebrada indica que C (o L en la otra figura) ha movido primero, pero L (o C) no sabe el resultado de esa elección. El conjunto-información de un jugador es el conjunto de informaciones que un jugador tiene sobre el estado del juego. Si Edipo hubiese sabido que el rey con el que se cruza al inicio era su padre, no hubiera habido tanto drama en Tebas. En su forma normal, el conjunto información es completo para cada jugador. No así en su forma extendida, ni tampoco en los juegos reales en la naturaleza o en la sociedad.

4. DOMINANCIA

Una acción o estrategia es estrictamente dominante sobre otra si sus utilidades son mayores que el rival. En el Ejemplo 1, L1C2 es estrictamente dominante. La dominancia estricta lleva a soluciones y a equilibrios de Nash.

Ahora bien, en el juego

	C1	C2
L1	10,10	-5,20
L2	20, -5	$^{+}0,0^{+}$

L tiene la estrategia estrictamente dominante L2, C tiene la estrategia estrictamente dominante C2, por tanto L2C2 es equilibrio de Nash.

- Un juego tiene racionalidad de orden 0, si todos sus agentes son instrumentalmente racionales
- Un juego tiene racionalidad de orden 1, si tiene orden 0 y cada agente cree que el otro es racional
- Un juego tiene racionalidad de orden 2, si tiene orden 0 y 1, y cada agente cree que el otro cree que es racional

…

Asumir que un juego tiene un determinado orden de racionalidad permite excluir opciones y alcanzar equilibrios de Nash. En clase se estudiaron ejemplos de racionalización de estrategias estrictamente dominantes.

En el juego siguiente decimos que C1 es estrictamente dominante para C, pero L es indiferente, y espera que C juegue C1.

	C1	C2
L1	$^{+}$10,10^{+}	$^{+}$5,10^{+}
L2	$^{+}$10,5^{+}	0,0

Una estrategia es débilmente dominante si garantiza, para cada opción del contrario, una utilidad al menos tan alta como cualquier otra estrategia, y más alta para al menos una opción de la oposición (L1 es débilmente dominante sobre L2)

Los siguientes juegos aportan ejemplos de racionalización para identificar equilibrios, tal y como se razonaron en clase:

	C1	C2	C3
L1	10,4	$^{+}$1,5^{+}	99,3
L2	9,9	0,3	98,2
L3	1,99	0,100	100,98

Ejemplo juego 2

	C1	C2	C3	C4
L1	5,12	-1,11	1,20	10,10
L2	4,-1	$^{+}$1,1^{+}	2,0	20,0

L3	3,2	0,4	4,3	50,1
L4	2,93	-1,92	0,91	100,90

Ejemplo juego 3

5. EQUILIBRIOS EN ESTRATEGIAS MIXTAS

Ya distinguimos arriba entre estrategias puras y mixtas. Los equilibrios de Nash en estrategias mixtas permiten asegurar un equilibrio de Nash para cualquier juego finito. Consideremos primero el juego siguiente con dos equilibrios puros:

	C1	C2
L1	0,0	$^{+}3,1^{+}$
L2	$^{+}1,3^{+}$	0,0

Entre estos dos equilibrios no hay modo racional de elegir. El concepto de Equilibrio de Nash con Estrategias Mixtas (ENEM) pretende definir procedimientos efectivos para restringir el número de equilibrios y finalmente permitir encontrar al menos un equilibrio en cada juego finito.

Hacemos dos supuestos básicos en relación a nuestro ejemplo de partida:

I. Indiferencia. Ningún jugador tiene razón alguna para preferir un equilibrio puro al otro

II. Aleatorización. Los jugadores eligirán aleatoriamente en función de las probabilidades

Asumamos ahora que la probabilidad con la que L elige L1 es ¾ y la probabilidad con la que C elige C1 es ¾, y dado que la suma de probabilidades es 1, tenemos:

	C1	C2	
L1	0,0	$^{+}3,1^{+}$	P=3/4
L2	$^{+}1,3^{+}$	0,0	P=1/4
	P=3/4	P=1/4	

En consecuencia, la utilidad esperada (U.E.) de L1 es la misma que la de L2, y la de C1 la misma que C2. UE(L1)=UE (L2), e igualmente UE(C1)=UE(C2)

Sea q la probabilidad con la que L espera que C elija entre C1 y C2 (q y 1-q respectivamente).
Sea p la probabilidad con la que C espera que L elija entre L1 y L2 (p y 1-p respectivamente).
L1 gana 0 ………….con probabilidad q……….. L2 gana 1
ó
L1 gana 3…………. con probabilidad 1-q……... L2 gana 0

Puesto que:

UE(L1)=0%q+3% (1-q)=3-3q

UE(L2)=1%q+0% (1-q)=q

Siendo ambas utilidades la misma, 3-3q=q
Por lo tanto q=3/4

Análogamente, con p y 1-p.

6. EQUILIBRIO EVOLUTIVO ESTABLE

La mano temblorosa en teoría de juegos designa la capacidad de un agente globalmente racional para tener comportamientos particulares irracionales. Los temblores son estratégicamente análogos a mutaciones biológicas. Es en el contexto evolutivo biológico en el que un nuevo concepto de equilibrio se desarrolla y a la vez encuentran aplicación natural tanto los equilibrios puros como los equilibrios mixtos.

El juego del halcón y la paloma es el siguiente:

	halcón	Paloma
Halcón	$^+2,2^+$	$^+2,0^+$
paloma	$^+0,2^+$	1,1

Con los señalados tres equilibrios puros de Nash, y un equilibrio de estrategias mixtas, tomando la estrategia Halcón con probabilidad de 1/3.
Con los conceptos ya conocidos podemos tomar una versión dinámica de este juego, que consiste en que los mismos jugadores lo repiten en múltiples ocasiones. Sin

embargo, la versión evolucionista del juego no es ésta versión dinámica, sino aquella en la que una población va nutriendo de diversos jugadores nuevos en los papeles de halcón y paloma. Siendo cada juego individual corto, la idea fundamental es que el éxito con el que se adopte una estrategia depende de su utilidad relativa a una población anónima.

Una estrategia de juego al halcón/paloma será evolutivamente estable si la población de jugadores no es susceptible de ser invadida por una estrategia mejor. Los equilibrios de estrategias mixtas suelen demostrar ser evolutivamente estables, y de hecho los criterios evolutivos permiten discriminar y elegir entre diversos equilibrios, puros o mixtos.

Un código de conducta es una estrategia evolutivamente estable (EEE) en alguno de los siguientes dos casos:

- el código es él mismo un equilibrio de Nash, puesto que entonces es una mejor respuesta a cualquier estrategia mutante
- conjunción de dos condiciones: 1. el código da una respuesta igual de útil que cualquier mutante, aunque no es un equilibrio de Nash, y 2. el código juega mejor contra cualquier mutante que éste contra sí mismo.

Obviamos las definiciones formales de estos conceptos.

8. REFERENCIAS SELECTAS

- Shaun P. Hargreaves Heap y Yanis Varoufakis, *Game Theory. A critical Text*, Routledge, London, 2004
- J. Maynard Smith, *Evolution and the Theory of Games*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982
- Johan van Benthem, *Logic and Games*, Institute for Logic, Language and Computation, Amsterdam, 2008